TD d'Analyse de base 1 : Nombres réels.

CPI 1 / S 1.

Exercice 1 :

Le maximum de deux nombres $x,\ y$ (c'est-à-dire le plus grand des deux) est noté $\max(x, y)$. De même on notera $\min(x, y)$ le plus petit des deux nombres x, y.

1. Démontrer que : $\max(x, y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\min(x, y) = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$.
2. Trouver une formule pour $\max(x, y, z)$.

Exercice 2 :

Montrer que le sous-ensemble $X = \left\{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\right\}$ de $\mathbb{Q}$ n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 3 :

Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément des ensembles suivants :

$$[0, 1] \cap \mathbb{Q}\ ,]0, 1[\cap \mathbb{Q}\ , \mathbb{N}\ , \left\{(-1)^n + \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 4 :

Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.

1. $\{a + bn;\ n \in \mathbb{N}\}$ **2.** $\{a + (-1)^n b;\ n \in \mathbb{N}\}$

3. $\{a + \frac{b}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ **4.** $\{(-1)^n a + \frac{b}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$

5. $\{a + (-1)^n \frac{b}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ **6.** $\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 5 :

Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont elles-minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A = \left\{\frac{n}{mn + 1};\ (m, n) \in \mathbb{N}^{*2}\right\}, \qquad B = \left\{\frac{n}{mn + 1};\ (m, n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Exercice 6 :

Soient A et B deux parties non-vides de $\mathbb{R}$ telles que :$\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ a \leq b$.
Démontrer que A est majoré, B est minoré et $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 7 :

Soient A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$\begin{array}{ll} -A = \{-a;\ a \in A\} & A + B = \{a+b;\ a \in A, b \in B\} \\ x + A = \{x+a;\ a \in A\} & AB = \{ab;\ a \in A, b \in B\}. \end{array}$$

1. Montrer que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$, $\inf A$, $\inf B$, $\inf(A+B)$ existent.
2. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
3. Montrer que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Montrer que $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.
5. Montrer que $\sup(x+A) = x + \sup(A)$.
6. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?
7. Que dire de $\sup(A \cap B)$, $\sup(A \cup B)$

Exercice 8 :

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup\{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$.

Exercice 9 :

1. Montrer que :$\forall x \in \mathbb{R},\ E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Montrer que :$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ \ E(x+n) = E(x) + n$.
3. Montrer que :$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ E(x) + E(y) \leq E(x+y)$.
4. Montrer que :$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ E(x+y) = E(x) + E(y) + \varepsilon(x,y)$ avec $\varepsilon(x,y) \in \{0,1\}$.
5. Montrer que :$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \ E(x) + E(y) + E(x+y) \leq E(2x) + E(2y)$.
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ E(\dfrac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 10 :

1. Démontrer que si $r \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Q}$ alors $r + x \notin \mathbb{Q}$ et si $r \neq 0$ alors $r.x \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire qu' entre deux nombres rationnels il y a toujours un nombre irrationnel. (i.e : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)
4. En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Exercice 11 :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner l'encadrement de la partie entière $E(x)$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{E(x) + E(2x) + ... + E(nx)}{n^2}$. Donner un encadrement simple de $n^2 u_n$.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite.
4. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Bonne chance